Racine carrée de la primitivation | Leçons : 208, 209, 236, 239, 2~~68~~

Thm : $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $I(f) : \begin{cases}]0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_0^1 \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}}\,du \end{cases}$

- $I(f)$ est définie, continue et admet un prolongement par continuité en 0.
- $\forall x \in [0,1]$, $\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $I(I(f))(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

Preuve :

- $\forall x \in]0,1]$, $u \mapsto \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}}$ est continue sur $[0,1[$
- $\left|\frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}}\right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{1-u}}$ car f continue sur un segment donc bornée qui est continue et intégrable sur $[0,1[$

Donc par théorème de continuité on a que

$$\varphi : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^1 \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}}\,du \end{cases}$$ est $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ donc $I(f) \in \mathcal{C}^0(]0,1],\mathbb{R})$

De plus φ est continue en 0 donc bornée au voisinage de 0 d'où

$$I(f)(x) = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\,\varphi(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

D'où $I(f)(0) = 0$

- L'application $f \mapsto I(f)$ et $\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ on a, $\forall x \in [0,1]$

$$|I(f)(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{1-u}}\,du = k\|f\|_\infty$$

D'où $\|I(f)\|_\infty \leq k\|f\|_\infty$

Donc $I(f)$ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$

Donc $I \circ I$ est également linéaire et continue

Par ailleurs $F : \begin{cases} \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \\ f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt\right) \end{cases}$ est également linéaire et continue.

Pour montrer que $I \circ I = F$ il suffit de raisonner par densité de l'ensemble des fonctions polynômiales sur $[0,1]$ dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ par théorème de Stone-Weierstrass.
Par linéarité de $I \circ I$ et F il suffit de montrer que ces applications coincident sur l'ensemble des fonctions monomiales sur $[0,1]$ qui forment une base de l'espace des fonctions polynomiales sur $[0,1]$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ tel que $P(x) = x^k$, alors $\forall x \in [0,1]$

$$I(P)(x) = \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_0^1 \frac{P(ux)}{\sqrt{1-u}} du = \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_0^1 \frac{(ux)^k}{\sqrt{1-u}} du$$

$$= \frac{x^{k+1/2}}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^1 \frac{u^k}{\sqrt{1-u}} du}_{\doteq b_k} = \frac{x^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} b_k$$

On a donc $$I(I(P))(x) = \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_0^1 \frac{I(P)(ux)}{\sqrt{1-u}} du = \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} b_k (ux)^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-u}} du$$

$$= \frac{1}{\pi} b_k x^{k+1} \underbrace{\int_0^1 \frac{u^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-u}} du}_{= c_k} = \frac{1}{\pi} b_k c_k x^{k+1}$$

Et on a $$b_k c_k = \left(\int_0^1 u^k (1-u)^{-1/2} du\right)\left(\int_0^1 u^{k+\frac{1}{2}} (1-u)^{-1/2} du\right) = B\left(k+1, \tfrac{1}{2}\right) B\left(k+\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

où $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt$ fonction Béta d'Euler définie sur $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}^2$

et $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ (#)

D'où $$b_k c_k = B\left(k+1, \tfrac{1}{2}\right) B\left(k+\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+\frac{3}{2})} \cdot \frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+2)} = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{2})}{k+1} = \frac{\pi}{k+1}$$

D'où $$I(I(P))(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x t^k dt = F(P)(x)$$

D'où $\forall x \in [0,1]$, $I(I(P)) = F(P)$ d'où $\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $I(I(f)) = F(f)$

(*) $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \int_0^{\infty} u^{\beta-1} e^{-u} du$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} u^{\beta-1} e^{-(t+u)} du$$

On pose $\begin{cases} x = t+u \\ y = \frac{t}{x} = \frac{t}{t+u} \end{cases}$ à l'aide $\begin{cases} t = xy \\ u = x(1-y) \end{cases}$

D'où $|J_{ac}| = \begin{vmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{vmatrix} = -xy - x(1-y) = -x$

D'où $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty}\int_0^{1} x\, x^{\alpha-1} y^{\alpha-1} x^{\beta-1} (1-y)^{\beta-1} e^{-x} dx\, dy$

$$= \int_0^{\infty} x^{\alpha+\beta-1} e^{-x} dx \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} dy$$

$$= \Gamma(\alpha+\beta) B(\alpha,\beta) \Rightarrow B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

B1 dans, Lesesvre

COMPLÉMENT

- Aussi possible par calcul direct
- et par racine cubique ...?